Ks. Lucjan Dyka
Rzeszów

„Musica Ecclesiastica”
12 (2017), s. 37–53

MENSURA INSTRUMENTI ORGANICI – CZYLI JAK STROJONO ORGANY W X W.

Wprowadzenie

Organy, jako instrument muzyczny, zostały skonstruowane przez Ktesibiosa w III w. przed Chr. w Aleksandrii. Dokładny opis wraz z przekładem i interpretacją tekstów Herona z Aleksandrii oraz Witruwiusza zostały opublikowane w „Musica Ecclesiastica”[1]. Instrument nazywany był *hydraulis*, czyli „organy wodne”, ze względu na użycie zbiornika z wodą (*pnigeus*) służącego do utrzymywania ciśnienia powietrza. Ten typ organów nie rozpowszechnił się jednak na szerszą skalę w wykonawstwie muzyki artystycznej. W dzieje budowy organów wpisał się raczej jako eksperyment techniczny oraz znacząca inspiracja do dalszych rozwiązań konstrukcyjnych, coraz bardziej doskonałych pod względem budowy i możliwości wykonawczych. Miał zastosowanie w cyrkach, o czym pisze Petroniusz (27–66 r.) w I w. po Chr. W dziele *Satiricon* czytamy: *Processit statim scissor et ad symphoniam gesticulatus ita laceravit obsonium, ut putares essedarium hydraule cantante pugnare*[2] (Rozcinający przystąpił natychmiast i do muzyki tańcząc tak rozcinał zakąskę, iż mógłbyś sądzić, że żołnierz walczy przy dźwięku organów). Tego rodzaju instrument znamy z odkrycia w Aquincum, obecnie na terenie Budapesztu.

Jakkolwiek z IV w. znane już są organy pneumatyczne[3], to jednak nie należy zbyt pochopnie sądzić, że organy z okresu starożytności czy średniowiecza wyglądały i funkcjonowały jak znane nam obecnie instrumenty. Zdecydowanie różniły się nie tylko budową, ale również techniką gry i strojem.

Wczesne organy nie posiadały klawiatury. Do otwierania i zamykania przepływu powietrza służyły zasuwy. Były one wyciągane przez organistę. Tego rodzaju mechanizm bardzo ograniczał możliwości wykonawcze.

Później zaczęto stosować już klawisze połączone z zasuwami, jednakże były one dużych rozmiarów (15 x 50 cm), pracowały ciężko, dlatego naciskano je pięściami lub łokciami[4]. Taki instrument opisany został w X w.

Dopiero w XIII w. zasuwy zastąpiono dźwigniami, które przypominały przyciski maszyny do pisania. A następnie (XIII, XIV w.) pojawiła się już klawiatura

[1] L. Dyka, *Organy w traktatach muzycznych antyku i wczesnego średniowiecza*, „Musica Ecclesiastica” 11 (2016), s. 11–31.

[2] C. Petronii, *Satiricon*, Liber XXXVI.

[3] J. Erdman, *Organy*, Warszawa 1989, s. 9.

[4] M. Dorawa, *Organy: konstrukcja, ochrona, konserwacja*, Toruń 1971, s. 6.

przypominająca współczesną. Początkowo nie było wszystkich klawiszy chromatycznych.

Wiadomo też, że inny był strój niż obecnie. Obecny, równomiernie temperowany strój, zaczęto stosować na szeroką skalę dopiero w XVIII w. Wcześniej był strój nierównomierny (naturalny).

Artyści przedstawiający wizerunki (obrazy, witraże) św. Cecylii, męczennicy z III w., często kojarzą ją z instrumentem, jaki nie mógł istnieć w tamtym czasie. Nie dość, że święta męczennica zasiada przed klawiaturą współczesną bądź trzyma w ręce niewielki portatyw z takim właśnie rodzajem klawiatury, to jeszcze piszczałki ustawione są w odwrotnej kolejności (od najmniejszej do największej), co jest sytuacją niemożliwą. Takie przedstawienie znajdujemy m.in. na witrażu w kościele Maryi Dziewicy (*Church of St. Mary the Virgin*) w Little Wymondley w Anglii (rys. 1)[5].

Rys. 1.

1. Problematyka strojenia organów w traktatach teoretycznych

Wiedzę na temat dokładnego strojenia poszczególnych dźwięków czerpiemy z łacińskich traktatów teoretycznych. Z okresu IX–XI w. posiadamy teksty anonimowe o następujących tytułach: *Mensura fistularum*[6], *Mensura fistularum*[7] i *Mensura instrumenti organici*[8].

Ważnym i ciekawym źródłem jest ostatnia część traktatu Notkera Labeo (ok. 950–1022) *De musica*[9]. Autor zatytułował ją: *De mensura fistularum organicarum*.

[5] http://www.polskieradio.pl/8/688/Artykul/1529547,Muzyczne-holdy-dla-sw-Cecylii-w-Bukareszcie, 23 XII 2016.

[6] H. SCHMID (red.), *Musica et scolica enchiriadis una cum aliquibus tractatulis adiunctis*, (Bayerische Akademie der Wissenschaften, Veröffentlichungen der Musikhistorischen Kommission 3), München 1981.

[7] *Anonyme Mensur der Orgelpfeifen* (Ex codice Bernensi Martiani Capellae 56b. Mitgetheilt von Schubiger Spicilegien S. 82. X. Jahrhundert.), w: H. RIEMANN, *Studien zur Geschichte der Notenschrift*, Leipzig 1878, s. 300.

[8] *Anonyme Mensur der Orgelpfeifen* (Cod. Paull. 1493. Fol. 61a.), w: H. RIEMANN, *Studien zur Geschichte*, s. 301.

[9] M. GERBERT (red.), *Scriptores ecclesiastici de musica sacra potissimum*, St. Blaise 1784, reprint: t. I, Hildesheim 1963, s. 95–102.

Z XII w. posiadamy natomiast anonimowy traktat *De mensura fistularum in organis*[10] oraz *Tractatus de mensura fistularum* autorstwa Eberharda z Freising (Eberhardus Frisingensis)[11].

Niemieckie przekłady oraz interpretacja tekstów dotyczących strojenia organów w średniowieczu znajdują się w dwutomowej pracy Klausa-Jürgena Sachsa *Mensura fistularum. Die Mensurierung der Orgelpfeifen im Mittelalter*, wydanej w Stuttgarcie (I tom – 1970) oraz Murrhardt (II tom – 1980). W literaturze polskojęzycznej ciągle brak jest kompletnych opracowań.

Niniejszy artykuł jest drobnym przyczynkiem do zgłębienia tej dziedziny wiedzy, która łączy w sobie mediewistyczne organoznawstwo i harmonię. Jego przedmiotem jest bowiem niewielkich rozmiarów anonimowy traktat zatytułowany *Mensura instrumenti organici* z X w. Tekst wart jest przekładu i interpretacji ze względu na bardzo ciekawą, zaskakującą wręcz metodę strojenia piszczałek organowych.

Oczywiście, omawiając strojenie organów w X w., należy wziąć pod uwagę fakt, że był to zapewne rodzaj instrumentu posiadającego zasuwy oraz strój naturalny. Nie było dźwięków chromatycznych, a jedynie diatoniczne, takie zresztą, jakie potrzebne były do wykonywania muzyki w skalach modalnych.

2. Treść traktatu oraz interpretacja

Tekst anonimowy z X w. jest bardzo zwięzły, przypomina raczej prostą instrukcję, niż traktat. Rozpoczyna się od razu informacją techniczną:

> *Mensuram et ordinem instrumenti organici qui scire voluerit, necesse est, ut in primis octo fistulas ante oculos unius longitudinis et grossitudinis (ponat). Sic tamen, ut in summitatem grossiores in inferiori parte graciliores semper sint.*
>
> Kto by chciał poznać mierzenie i konstrukcję organów, koniecznie musi najpierw przedstawić sobie przed oczy osiem piszczałek jednej długości i grubości. Tak jednak, aby w górnej części zawsze były grubsze, a w dolnej części węższe[12].

Jasne jest, że w tej informacji nie chodzi o faktyczne sporządzenie ośmiu piszczałek o jednakowej długości. Praca taka byłaby bezużyteczna. Chodzi raczej o przygotowanie projektu. *Ponere ante oculos* oznacza tutaj przedstawienie czy nawet wyobrażenie sobie, a nie faktyczne oglądanie. Piszczałki co do kształtu mają być jednakowe. Oznacza to, że w dalszym procesie strojenia będą one wyłącznie skracane. Obecnie piszczałki wraz ze wzrostem wysokości dźwięków są coraz krótsze, ale też coraz węższe, dlatego mierzenie proporcji samych długości zupełnie nie będzie odpowiadać tej metodzie, jaką prezentuje autor interesującego nas traktatu.

---

[10] Anonymi, *De mensura fistularum in organis*, w: M. Gerbert (red.), *Scriptores ecclesiastici*, t. II, s. 283–287.

[11] Eberhardus Frisingensis, *Tractatus de mensura fistularum*, w: M. Gerbert (red.), *Scriptores ecclesiastici*, t. II, s. 279–282.

[12] Tekst główny traktatu oraz cytowane dalej fragmenty dzieł greckich i łacińskich przełożył autor artykułu.

Po tym wprowadzeniu, które każe czytelnikowi (budowniczemu) zaprojektować pierwsze osiem piszczałek, autor przechodzi do odmierzania kolejnych długości piszczałek zgodnie z proporcjami matematycznymi znanymi jeszcze z czasów szkoły pitagorejskiej. Czytamy zatem:

> Tunc accipiens primam quam longam et quam brevem illam faciat, suae sit potestati, sed pro secunda primam in novem partes dividat fistulam et det secundae octo partes.
>
> Wówczas biorąc pierwszą, niech ją uczyni na tyle długą i na tyle krótką, by miała właściwą wartość, lecz dla drugiej pierwszą piszczałkę niech podzieli na dziewięć części i niech da drugiej osiem części.

Pierwsza piszczałka ma wydawać najniższy dźwięk w instrumencie. Autor nie określa ani nawet nie sugeruje ogólnie jej wymiarów. Tę kwestię pozostawia do dyspozycji konstruktora, który musi wiedzieć, jaka jest odpowiednia długość i obwód piszczałki, by wydała pożądany dźwięk. Autor – zakładając, że ten dźwięk jest należyty – skupia się jedynie na strojeniu dźwięków następnych.

Można przyjąć, że pierwsza piszczałka będzie wydawać dźwięk „c" (małe), druga zaś – „d". Pomiędzy nimi ma być stosunek 9:8. Jest to znany już pitagorejczykom stosunek liczbowy wyrażający ton (sekundę wielką). Czy to skrócenie struny w takim stosunku, czy piszczałki, skutkować będzie tym, że ta krótsza będzie brzmieć o ton wyżej. Najprościej jest więc podzielić dłuższą piszczałkę na równych 9 części, a następnie pomnożyć przez 8.

Stosunek 9:8 nazywa się stosunkiem epogdoicznym. Jest to spolszczenie przymiotnika greckiego ἐπόγδοος, -ον, który oznacza „zawierający $1\frac{1}{8}$", a etymologicznie pochodzi od zestawienia przyimka ἐπί (nad, ponad) z liczebnikiem porządkowym ὄγδοος, -η, -ον (ósmy).

Dla uzyskania odpowiedniego dźwięku trzeciej piszczałki autor poleca wykonać dokładnie taki sam zabieg. Za podstawę bierzemy jednak drugą piszczałkę i z dziewięciu jej części odkładamy osiem. W tekście traktatu znajdujemy prosty komunikat:

> Item secundam fistulam dividat in novem et det tertiae octo partes.
>
> Podobnie drugą piszczałkę niech podzieli na dziewięć i da trzeciej osiem części.

Znowu pomiędzy piszczałką drugą i trzecią zaistnieje stosunek epogdoiczny, a pod względem wysokości różnica wyniesie jeden ton.

Warto w tym miejscu odejść na moment od traktatu *Mensura instrumenti organici* i zadać sobie pytanie, skąd się bierze ów stosunek epogdoiczny dla interwału całego tonu. Autor bowiem nie spieszy z wyjaśnieniem tej kwestii. Trzeba sięgnąć do greckich podręczników harmoniki prezentujących pitagorejskie koncepcje. Bardzo dobrą propozycją jest *Wprowadzenie do harmoniki* (*Harmonikē̃ eisagōgē̃*) Gaudencjusza[13]. 9. rozdział tego dzieła zawiera definicję tonu:

> Συμφωνίαι δέ εἰσιν ἐν τῷ τελείῳ συστήματι τὸν ἀριθμὸν ἕξ. πρώτη μὲν ἡ διὰ τεσσάρων, δευτέρα δὲ ἡ διὰ πέντε, τόνῳ τοῦ διὰ τεσσάρων ὑπερέχουσα· ὅθεν καί τινες ὡρίσαντο τὸ τονιαῖον διάστημα διαφορὰν εἶναι τῶν πρώτων δύο συμφώνων κατὰ τὸ μέγεθος.

[13] Tekst grecki znajduje się w: *Gaudenti Philosophi Harmonica Introductio*, w: C. Janus (red.), *Musici scriptores graeci*, Lipsiae 1895, s. 317–356.

> W systemie doskonałym jest sześć konsonansów. Pierwszym jest kwarta, drugim kwinta, różniąca się od kwarty tonem; stąd też niektórzy określają, że interwał jednego tonu jest różnicą pierwszych dwóch konsonansów pod względem wielkości.

Powyższy tekst nie wnosi niczego nowego do naszej wiedzy na temat interwałów. Znając jednak podstawowe stosunki liczbowe wyrażające trzy najważniejsze proste konsonanse, możemy rozpocząć i przeprowadzić wiele obliczeń wyjaśniających szereg kwestii harmonicznych. Przypomnijmy, że dla oktawy czystej stosunek ten wynosi 2:1 (stosunek podwójności), dla kwinty czystej – 3:2 (stosunek hemioliczny[14]), a dla kwarty czystej – 4:3 (stosunek epitrytyczny[15]). Dodając do siebie interwały, tak jak je sobie wyobrażamy w skali czy na klawiaturze, należy te stosunki mnożyć. Jasne jest przecież, że np. dodając kwartę do kwinty, najpierw z całości odcinamy 2/3, a potem należy odciąć 3/4, ale już nie z całości, tylko z owych 2/3. Sprawdźmy:

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

Powyższe działanie matematyczne pokazało, że suma kwinty czystej i kwarty czystej daje oktawę czystą.

Odwrotnością mnożenia jest dzielenie, a będzie nam ono służyć do odejmowania interwałów. Potrzebujemy, zgodnie z powyższym tekstem Gaudencjusza, odjąć kwartę od kwinty, aby otrzymać cały ton (sekundę wielką). Policzmy:

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

Rachunek udowodnił, że stosunkiem wyrażającym ton jest 9:8. Czas zatem wrócić do dalszego strojenia organów według metody Anonima z X w.:

> *Pro quarta accipiat primam dividens illam in quatuor partes et det tres partes illius quartae fistulae.*
>
> Dla czwartej niech weźmie pierwszą, dzieląc ją na cztery części, i niech da trzy jej części czwartej piszczałce.

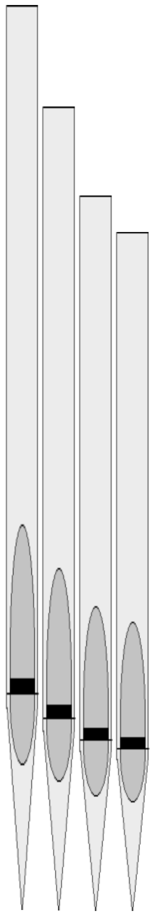
O ile pomiędzy pierwszą a drugą oraz drugą a trzecią piszczałką należało uzyskać cały ton, czwartą piszczałkę należy nastroić kwartę wyżej od pierwszej. Służy do tego znany nam już stosunek epitrytyczny. To dopiero drugi stosunek liczbowy używany przez autora traktatu i – jak się okaże – ostatni. Oznacza to, że w celu nastrojenia wszystkich piszczałek w instrumencie autor posłużył się tylko stosunkiem epogdoicznym i epitrytycznym. Czy to nie za mało i czy strój będzie precyzyjny? Dalsza analiza tekstu oraz rozważania wyjaśniające dadzą odpowiedź na te ważne pytania.

Do tej pory mamy tetrachord w klasycznej postaci, czyli zawarty pomiędzy dźwiękami skrajnymi oddalonymi od siebie o kwartę czystą. Przedstawmy to na rysunku.

---

[14] Nazwa jest spolszczeniem greckiego przymiotnika ἡμιόλιος, -α, -ον, oznaczającego „półtora razy większy", a składa się z dwóch słów: ἡμι- (połowa) [ponad] i ὅλος (cały).

[15] Nazwa jest spolszczeniem greckiego przymiotnika ἐπίτριτος, -η, -ον, oznaczającego „zawierający 1 i 1/3", a składa się z przyimka ἐπί (nad, ponad) oraz liczebnika porządkowego τρίτος, -η, -ον (trzeci).



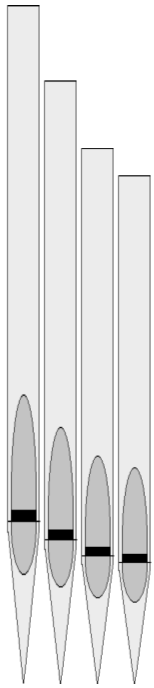
rys. 2.

Począwszy od dźwięku wydawanego przez czwartą piszczałkę, anonimowy autor zaleca postępować dokładnie tak samo, jak w przypadku strojenia pierwszego tetrachordu.

> *Iterum divide quartam fistulam in novem partes et det quintae octo. Quintam partire in novem et dabis sextae octavam partem. Pro septima accipiat quartam fistulam dividatque in quatuor partes et det septimae tres partes.*
>
> Ponownie podziel czwartą piszczałkę na dziewięć części i niech da piątej osiem. Piątą podziel na dziewięć i dasz szóstej ósmą część. Dla siódmej niech weźmie czwartą piszczałkę, podzieli na cztery części i da siódmej trzy części[16].

[16] Styl przekładu może nieco razić, ponieważ w tekście oryginalnym orzeczenie użyte jest raz w 2. os. l. poj. (*divide, dabis*), innym razem w 3. os. l. poj. (*accipiat, dividat, det*). Nadto podmiotem domyślnym raz jest piszczałka, a raz potencjalny czytelnik. W przekładzie starano się wiernie oddać tekst łaciński.

Takie strojenie kolejnych piszczałek skutkuje stworzeniem kolejnego tetrachordu. Ponieważ jednak pierwszy jego dźwięk („f”) jest zarazem ostatnim dźwiękiem poprzedniego tetrachordu, w całości nie będzie to jeszcze oktawa, ale septyma mała. Kolejnymi zaś dźwiękami konsekwentnie będą: „f”, „g”, „a”, „b” (si-bemol).



rys. 3.

W redakcji H. Riemanna w tym miejscu pojawiła się w nawiasie informacja w języku niemieckim:

> (diese Theilung[17] ergiebt die kleine Septime [Synemmenon], unser b).
>
> (to rozmieszczenie daje septymę małą [w łącznym układzie tetrachordów], nasze b).

Autor z X w. nie potrzebował zamieszczać tego rodzaju wyjaśnienia, dla pewności znalazło się ono natomiast w XIX-wiecznej edycji. W ówczesnej harmonii, całkowicie zdominowanej przez system funkcyjny dur-moll, konstruowanie łącznego zestawienia dwóch tetrachordów mogło budzić zdziwienie.

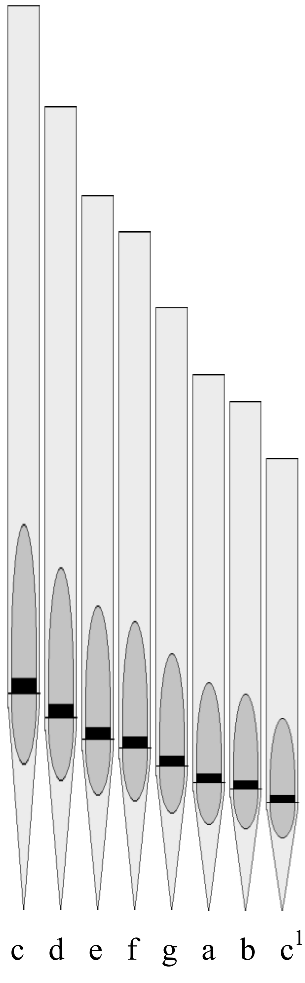
Nie na tym jednak kończy się strojenie organów. Oktawa czysta zostanie dopełniona w ostatnim kroku zasadniczych obliczeń. Niczego nowego autor jednak nie zastosuje. Po prostu od dźwięku „b” do „c^1” znowu przejdzie za pomocą stosunku epogdoicznego.

[17] Chodzi o niemiecki wyraz *Teilung* (podział, rozmieszczenie), dawniej pisany przez „Th”.

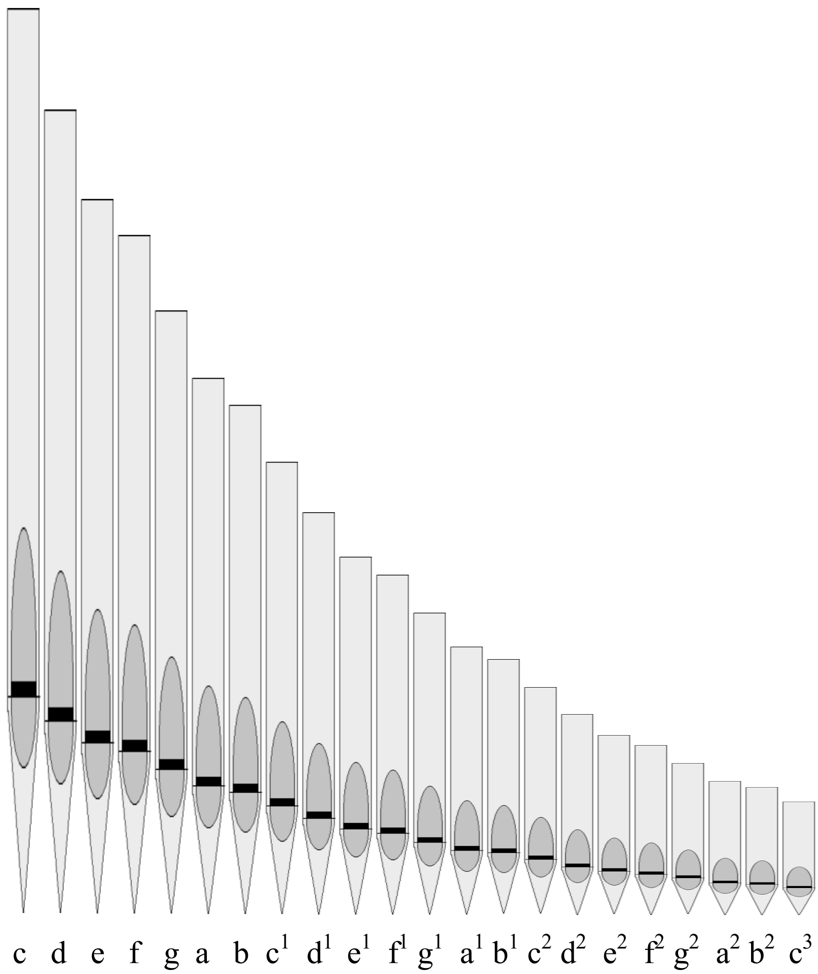
Accipe septimam fistulam, divide in novem et accipiat octava octo partes.

Weź siódmą piszczałkę, podziel na dziewięć i niech ósma przyjmie osiem części.

Tym sposobem zamknęliśmy oktawę. Nie jest ona jednak typowym szeregiem dźwięków diatonicznych, bowiem siódmy stopień został obniżony.



rys. 4



Rys. 5[18].

Dalsze strojenie nie jest już opisane szczegółowo krok po kroku. Czytelnik otrzymuje jedynie ogólną informację, by czynności powtórzył dla drugiej i trzeciej oktawy.

[18] Na niniejszym rysunku (podobnie jak w poprzednio prezentowanych już jego fragmentach) przyjęto dla największej piszczałki 12 cm. Konsekwentnie zatem kolejne będą miały wymiary (z dokładnością do dwóch cyfr po przecinku) w centymetrach: d = 10,66, e = 9,48, f = 9 (*epítritos* względem c), g = 8 (f względem g najwyraźniej pokazuje stosunek epogdoiczny), a = 7,11, b = 6,75 (*epítritos* względem f), c^1 = 6 (stosunek podwójności c^1 względem c), d^1 = 5,33, e^1 = 4,74, f^1 = 4,5 (*epítritos* względem c^1 i stosunek podwójności względem f), g^1 = 4 (stosunek podwójności względem g oraz stosunek potrójności względem c, odpowiadający duodecymie), a^1 = 3,55, b^1 = 3,37 (dokładnie 3,375, co tworzy stosunek epitrytyczny względem f^1), c^2 = 3 (stosunek podwójności z c^1 oraz poczwórności z c), d^2 = 2,66, e^2 = 2,37, f^2 = 2,25 (*epítritos* względem c^2 i stosunek podwójności względem f^1 oraz poczwórności względem f), g^2 = 2 (stosunek podwójności względem g^1 i poczwórności względem g), a^2 = 1,77, b^2 = 1,69 (dokładnie 1,6875, co tworzy stosunek epitrytyczny względem f^2); c^3 = 1,5 (stosunek podwójności względem c^2, poczwórności względem c^1 oraz ośmiokrotności względem c).

Octava peracta, illo ordine quo de prima ad octavam venit, de octava iterum perveniat ad decimam quintam, quae est octavae octava; de quinta decima similiter illa ipsa regula ad vicesimam primam, quae est octava quintae decimae.

Po sporządzeniu ósmej, w tym samym porządku, w którym od pierwszej do ósmej przeszedł, od ósmej niech ponownie przejdzie do piętnastej, która jest oktawą oktawy; od piętnastej podobnie zgodnie z tą samą regułą do dwudziestej pierwszej, która jest oktawą kwintdecymy.

W powyższym tekście zawarta jest ewidentna pomyłka, ponieważ ostatnia piszczałka nie powinna być 21., ale 22. Trudno dochodzić przyczyn błędnego zastosowania liczebnika. Faktem jest natomiast, że w niektórych późniejszych edycjach korygowano ją. Tak jest chociażby we wspomnianym wyżej I tomie *Mensura fistularum. Die Mensurierung der Orgelpfeifen im Mittelalter* Klausa Jürgena Sachsa (s. 93–95). Samo poprawione słówko *secundam* zaznaczone jest za pomocą nawiasów ostrokątnych[19].

Zasadnicza część tekstu *Mensura instrumenti organici*, dotycząca mierzenia piszczałek, na tym się kończy. W pełni otrzymaliśmy 3 oktawy – 22 piszczałki (umownie od „c" do „c³") – zob. rys. 5.

Tym sposobem anonimowy autor z X w. „nastroił" organy wyłącznie przy pomocy dwóch stosunków liczbowych: epogdoicznego $\frac{9}{8}$ i epitrytycznego $\frac{4}{3}$. Nie zastosował nawet tak prostych i pewnych stosunków, jak $\frac{2}{1}$ odpowiadającego za oktawę czy $\frac{3}{2}$ odpowiadającego za kwintę. Warto w tym miejscu zadać pytanie, czy strój, jaki otrzymaliśmy na podstawie przeanalizowanego traktatu, jest poprawny i dokładny oraz jakiego rodzaju jest to strój. Ostateczną odpowiedź otrzymamy na końcu, po wielu wyliczeniach, koniecznych do zweryfikowania całego systemu.

3. Weryfikacja poprawności i dokładności stroju piszczałek organowych według traktatu *Mensura instrumenti organici*

Analizując traktat z X w. o mierzeniu organów, łatwo było się zorientować, że autor zupełnie nie zatroszczył się o wskazanie stosunku podwójności dla oktawy. Nie zalecał też nigdzie strojenia piszczałki o oktawę wyższej zgodnie z tym stosunkiem. Trzeba zatem sprawdzić, co dzieje się wewnątrz całego systemu i czy rzeczywiście oktawy są idealnie czyste[20].

Dostępne dane do przeprowadzenia obliczeń mamy skromne. Wiemy, że od „c" do „f" oraz od „f" do „b" są kwarty czyste, a następnie dodana została sekunda wielka. Pozwala nam to na wykonanie następującego działania:

$$\frac{4}{3} \text{ x } \frac{4}{3} \text{ x } \frac{9}{8} = \frac{144}{72} = \frac{2}{1}$$

[19] Zob.: http://www.lml.badw.de/info/fist15.htm, 23 XII 2016.

[20] Bardzo obszerne prezentacje dotyczące obliczania poszczególnych interwałów w systemie greckim znajdzie czytelnik w: D. Creese, *The Monochord in Ancient Greek Harmonic Science*, Cambridge 2010.

Nie ma wątpliwości, że dwie kwarty czyste oraz sekunda wielka (zgodnie ze stosunkiem epogdoicznym) dają oktawę czystą. Przy okazji można ustalić stosunek matematyczny dla septymy małej, która jest sumą dwóch kwart czystych łącznych:

$$\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

Stosunek liczbowy septymy małej to $\frac{16}{9}$, a zsumowanie jej z sekundą wielką $\frac{9}{8}$ da oktawę czystą:

$$\frac{16}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{144}{72} = \frac{2}{1}$$

Można by na tym zakończyć badanie stosunków liczbowych i wynikających zeń interwałów. Wnikliwego czytelnika zainteresuje jednak problem, co dzieje się pomiędzy dźwiękami „e" i „f" oraz „a" i „b". Powszechnie uważa się, że jest tam półton, a kwarta czysta to nic innego, jak interwał o rozmiarze dwóch i pół tonu. Skoro tak, to dwie kwarty powinny dać 5 tonów, a dodatkowa sekunda wielka będzie szóstym tonem w oktawie. Tak jest w systemie równomiernie temperowanym. Czy jednak odpowiada to systemowi naturalnemu?

Warto zatem w tym miejscu postawić sobie pytanie, czy 6 tonów jest równe oktawie czystej. Obliczenie jest proste, a polegać będzie na zsumowaniu sześciu stosunków epogdoicznych:

$$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{531441}{262144} = 2{,}0272865295$$

Uzyskany stosunek nie jest stosunkiem podwójności. Oznacza to, że 6 całych tonów nie równa się oktawie. Gdzie zatem szukać rozwiązania problem? Dokładnie tam, gdzie ciągle mamy niewiadomą, czyli w tzw. półtonie, który w istocie półtonem nie jest. Zanim jednak podejmiemy dalsze badanie, należy wspomnieć, że wniosek taki postawił już Pseudo-Euklides, żyjący w III w. przed Chr. w *Katatomḗ kanónos*:

> ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, καὶ γίνεται
>
> ὁ μὲν Α κς μύρια ,βρμδ,
>
> ὁ δὲ Β κθ μύρια ,δϡιβ,
>
> ὁ δὲ Γ λγ μύρια ,αψος,
>
> ὁ δὲ Δ λζ μύρια ,γσμη,
>
> ὁ δὲ Ε μα μύρια ,θϡδ,
>
> ὁ δὲ Ζ μζ μύρια ,βτϟβ,
>
> ὁ δὲ Η νγ μύρια ,αυμα,
>
> καί ἐστιν ὁ Η τοῦ Α μείζων ἢ διπλάσιος[21].
>
> Skoro nauczyliśmy się szukać siedem liczb epogdoicznych względem siebie, niech to będą A, B, Γ, Δ, E, Z, H, i
>
> A = 262144,
>
> B = 294912,

[21] *Euclidis Sectio Canonis*, w: C. Janus, *Musici scriptores graeci,* s. 157n.

Γ = 331776,

Δ = 373248,

E = 419904,

Z = 472392,

H = 531441,

a H jest większe niż podwójne A.

Owe siedem liczb tworzy sześć stosunków epogdoicznych. Autor wychodzi od najmniejszej i zgodnie z tym stosunkiem uzyskuje kolejne liczby. Dochodzi w ten sposób do ostatniej, która tworzy z pierwszą stosunek $\frac{531441}{262144}$, a jest to dokładnie ta sama wartość, którą otrzymaliśmy powyżej, sumując 6 stosunków epogdoicznych. Sprawa zatem jest znana od czasów starożytnych, bowiem tego rodzaju działania matematyczne wykonywane były przez pitagorejczyków.

Powyższe wyliczenie rzuca dużo światła na wzajemne relacje tonu względem oktawy. Ciągle jednak nie znamy odpowiedzi na pytanie, jaki jest stosunek określający ów rzekomy półton. Zanim ją otrzymamy, warto zwrócić uwagę, że problem ten był dyskutowany w starożytności. Kwestia podziału tonu na dwa równe półtony nie była rzeczą łatwą, a zresztą ostatecznie okazała się zupełnie niepotrzebna. Próbowano podzielić w sposób prosty stosunek epogdoiczny.

Jedną z takich prób opisuje Gaudencjusz w 14. rozdziale *Harmonikḗ eisagōgḗ*. Warto przytoczyć cały passus tekstu ze względu na uporządkowaną terminologię oraz wykazanie, że próba wyliczeń tego typu nie powiodła się.

> ἔστι μὲν γὰρ ἐλάττων ἢ ἐφεπτακαιδέκατος ὁ σνς τοῦ σμγ. δύο δὲ ἐφεπτακαιδέκατοι συντεθέντες οὐ συμπληροῦσιν ἐπόγδοον, ὥστε ὁ μὲν ἐφεπτακαιδέκατος λόγος λείπει ἥμισυς εἶναι ἐπογδόου. ὁ δὲ τῶν σνς πρὸς τὰ σμγ λειπόμενος καὶ τοῦ ἐφεπτακαιδέκατος εἶναι, πολὺ ἂν μᾶλλον λείποιτο ἥμισυς εἶναι τοῦ ἐπογδόου. ἔλαττον ἄρα τὸ λεγόμενον ἡμιτόνιον τοῦ ἀληθῶς ἡμιτονίου, διόπερ λεῖμμα ἐκλήθη, καὶ λόγον ἔχει, ὃν τὰ σμγ πρὸς τὰ σνς.
>
> Τοῦ δὲ λείμματος τὸ λεῖπον εἰς συμπλήρωσιν τόνου καλεῖται ἀποτομή, κοινῶς δὲ καὶ αὐτὸ ἡμιτόνιον, ὥστε ἔσται τῶν ἡμιτονίων τὸ μὲν μεῖζον, τὸ δὲ ἔλαττον[22].
>
> [Stosunek] 256 do 243 jest bowiem mniejszy od [stosunku] efeptakaidekatycznego. Dwa zsumowane stosunki efeptakaidekatyczne nie wypełniają stosunku epogdoicznego, dlatego że stosunkowi efeptakaidekatycznemu brakuje, by być połową stosunku epogdoicznego. A [stosunkowi] 256 do 243 brakuje nawet, żeby był [stosunkiem] efeptakaidekatycznym, o wiele bardziej zaś brakuje, żeby był epogdoicznym. Tak zwany półton jest więc mniejszy od prawdziwego półtonu, dlatego nazywa się *leímma* i ma stosunek taki jak 243 do 256[23].
>
> Pozostałość od *leímma* do wypełnienia tonu nazywa się *apotomḗ*, popularnie również ona jest półtonem, a zatem będą pośród półtonów większy i mniejszy.

---

[22] *Gaudenti Philosophi Harmonica Introductio*, s. 343.

[23] W tym miejscu nie należy zrażać się odwrotną kolejnością liczb w stosunku. Ponieważ wiadomo, że większa wartość zawsze będzie nas informować o liczbie części, na które należy podzielić strunę, a mniejsza o liczbie części brzmiących, ostatecznie nie ma znaczenia, która jest pierwsza, a która druga, byleby we wszystkich rachunkach zachować bezwzględną konsekwencję. Sytuację taką będziemy jeszcze obserwować w kolejnym zacytowanym tekście z dzieła Gaudencjusza.

W powyższym tekście autor wprowadza pojęcie stosunku efeptakaidekatycznego[24], czyli $\frac{18}{17}$. Miałby on być wynikiem podziału stosunku epogdoicznego na dwie równe części. W rzeczywistości podział taki jest równy, ale w rozumieniu geometrycznym. W odnajdywaniu interwałów nie może mieć zastosowania, ponieważ każdy następny interwał (badany na monochordzie) jest wynikiem odpowiedniego stosunku nie całej struny, ale jej pozostałej części, a zatem dwa idealnie równe interwały na podziałce będą się różniły długością (im wyższe dźwięki, tym krótsze odległości pomiędzy tymi samymi interwałami). Szukanie metody podziału tonu na dwie równe części na podstawie stosunku efeptakaidekatycznego jest zatem błędne już w punkcie wyjścia. Można to oczywiście z łatwością sprawdzić:

$$\frac{18}{17} \text{ x } \frac{18}{17} = \frac{324}{289}$$

Stosunek, który otrzymaliśmy, nie jest stosunkiem epogdoicznym. Jest nim natomiast stosunek $\frac{324}{288}$ (= $\frac{9}{8}$), a zatem różnią się od siebie wręcz minimalnie. Nawet tak mała różnica wykazuje jednak, że stosunek efeptakaidekatyczny nie jest dokładnie połową stosunku epogdoicznego.

Przy tej okazji od razu udowodnijmy, że interwał wynikający z tego stosunku dodany do dwóch całych tonów nie da kwarty czystej:

$$\frac{9}{8} \text{ x } \frac{9}{8} \text{ x } \frac{18}{17} = \frac{1458}{1088}$$

Rzeczywiście otrzymany wynik nie jest w stosunku epitrytycznym.

Warto w tym miejscu wspomnieć, że w całej literaturze greckiej zagadnienie stosunku efeptakaidekatycznego podejmowane było niezwykle rzadko. Poza Gaudencjuszem wspomina o nim jeszcze Arystydes Kwintylian w III księdze *De musica*[25], a także jednokrotnie Plutarch (ok. 50 – ok. 125)[26] i wielokrotnie Proklos (412–485)[27].

Arystydes Kwintylian idzie nieco dalej i wprowadza stosunek efekkaidekatyczny ($\frac{17}{16}$)[28]. Istotnie, jeżeli stosunek epogdoiczny wyrazimy liczbami $\frac{18}{16}$, to da się w nim wyznaczyć dwa stosunki ($\frac{18}{17}$ i $\frac{17}{16}$)[29]. Nie mogą one wyrażać interwałów o jednakowych rozmiarach, ale w sumie będą dawały cały ton:

---

[24] Nazwa jest spolszczeniem greckiego przymiotnika ἐφεπτακαιδέκατος, który składa się z przyimka ἐπί (nad, ponad) oraz liczebnika porządkowego ἑπτακαιδέκατος, -η, -ον (siedemnasty). Oznacza zatem taki stosunek liczbowy, w którym większa liczba jest o jeden większa od 17.

[25] *Aristidis Quintiliani De musica libri tres*, R.P. Winnington-Ingram (red.), Lipsiae 1963, s. 95n.,112.

[26] Plutarch, *De animae procreatione in Timaeo*, w: W.C. Helmbold (red.), *Plutarch's Moralia*, t. XIII, Cambridge – London 1962, s. 1021.

[27] E. Diehl, *Procli Diadochi in Platonis Timaeum commentaria*, t. II, Leipzig 1904, s. 179, 181.

[28] Nazwa jest spolszczeniem greckiego przymiotnika ἐφεκκαιδέκατος, -ον, oznaczającego „zawierający całość i 1/16", a składa się z przyimka ἐπί (nad, ponad) oraz liczebnika porządkowego ἑκκαιδέκατος, -η, -ον (szesnasty).

[29] Zob.: R. Bernagiewicz, *Wprowadzenie do historii teorii muzyki. Starożytna Grecja*, Lublin 2007, s. 135.

$$\frac{18}{17} \text{ x } \frac{17}{16} = \frac{306}{272} = \frac{9}{8}$$

Niestety, żaden z tych interwałów nie będzie tym właściwym, który dopełnia kwartę czystą. Odnośnie do stosunku $\frac{18}{17}$ przekonaliśmy się już wyżej, natomiast stosunek efekkaidekatyczny dodany do dwóch całych tonów da następujący wynik:

$$\frac{9}{8} \text{ x } \frac{9}{8} \text{ x } \frac{17}{16} = \frac{1377}{1024}$$

Otrzymany stosunek liczbowy nie jest epitrytyczny.

Problemem zasadniczym tego typu obliczeń jest nie tylko znalezienie interwału tworzącego wraz z dwoma tonami kwartę czystą, ile sam podział całego tonu na dwa równe półtony. Jak widzieliśmy wyżej, próby związane ze stosunkiem efeptakaidekatycznym i efekkaidekatycznym nie dały rezultatu. Okazuje się, że podział całego tonu na dwie równe połowy jest niemożliwy na drodze czysto matematycznej. Gdybyśmy, zgodnie z poprawnymi zasadami, chcieli dzielić jakikolwiek stosunek na dwie równe części, należałoby wykonać działanie pierwiastkowania obu liczb tworzących ten stosunek. Wówczas dodając do siebie istotnie dwa idealnie jednakowe interwały, wykonalibyśmy zwyczajnie działanie mnożenia i otrzymalibyśmy stosunek wyrażający interwał uprzednio podzielony. W przypadku interesującego nas stosunku epogdoicznego otrzymamy $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$.

Z całą pewnością stosunek wyrażający dokładną połowę tonu to $\frac{3}{\sqrt{8}}$. Problem w tym, że $\sqrt{8}$ jest liczbą niewymierną. Oznacza to, że faktycznie nie da się całego tonu podzielić dokładnie na dwa półtony, a co za tym idzie, nie da się idealnie wyznaczyć na monochordzie tego punktu, w którym moglibyśmy uzyskać połowę tonu. Jest to na szczęście problem czysto teoretyczny, ponieważ – jak się okazuje – półton nie ma w muzyce żadnego zastosowania. Chodzi oczywiście o strój naturalny. Problem ten również nie ma istotnego wpływu na to, co można usłyszeć zmysłem słuchu. Brak dokładności wynikający z niewymierności $\sqrt{8}$ dotyczy bowiem dopiero dziesiątego miejsca po przecinku w ułamku dziesiętnym. Są to zatem wartości dotyczące dziesięciomiliardowej części. Nawet najbardziej czuła współczesna aparatura do pomiaru wysokości dźwięku nie jest w stanie wychwycić tej niedokładności.

Poszukując w dalszym ciągu odpowiedniego interwału, który dopełnia kwartę czystą, dokonajmy pewnego prostego zabiegu. Można do tego posłużyć się systemem naszego anonimowego autora z X w., skoro przekonaliśmy się już wstępnie, że jest on poprawny. Dla piszczałki najdłuższej przyjmijmy wartość 324 jednostki. Liczba ta podyktowana jest założeniem, by pozyskując kolejne liczby na podstawie stosunków, posługiwać się liczbami całkowitymi. Jeden wyjątek będzie tylko na VII stopniu. Wychodząc od tej wartości, całość możemy przedstawić za pomocą poniższej tabeli:

c	d	e	f	g	a	b	c^1
324 :	288 :	<u>256 :</u>	<u>243</u> :	216 :	192 :	182,25 :	162
9 :	8						
	9 :	8					
4 :			3				
			9 :	8			
				9 :	8		
			4 :			3	
						9 :	8

Użyte zostały wyłącznie stosunki epogdoiczne i epitrytyczne, zalecane przez autora traktatu *Mensura instrumenti organici*. Liczby w górnej linii (pod nazwami dźwięków) odpowiadają dokładnie tym stosunkom. Pomiędzy dźwiękami „e" i „f" „odkryliśmy" stosunek $\frac{256}{243}$, którego już nie da się uprościć (ten sam stosunek pomiędzy dźwiękami „a" i „b" [192 : 182,25] zawiera ułamek dziesiętny). Zatem stosunek liczbowy wyrażający interwał dopełniający kwartę wynosi $\frac{256}{243}$.

Jeśli podwoimy tę wartość, uzyskamy wynik, który nie jest stosunkiem epogdoicznym.

$$\frac{256}{243} \times \frac{256}{243} = \frac{65536}{59049}$$

65536 podzielone przez 9, a następnie pomnożone przez 8 daje 58254,222…, a więc liczbę zdecydowanie różną od 59049. Oznacza to, że interwał wyrażony stosunkiem $\frac{256}{243}$ nie jest połową tonu, jest natomiast z pewnością interwałem, który wraz z dwoma całymi tonami tworzy kwartę czystą. Można to zresztą już teraz łatwo sprawdzić:

$$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{256}{243} = \frac{20736}{15552} = \frac{4}{3}$$

W tym miejscu znowu odwołajmy się do tekstu Gaudencjusza:

> Τὸ δὲ ἡμιτόνιον καλούμενον οὐκ ἔστιν ἀκριβῶς ἡμιτόνιον· λέγεται δὲ κοινῶς μὲν ἡμιτόνιον, ἰδίως δὲ λεῖμμα, καὶ ἔχει λόγον, ὃν τὰ σμγ πρὸς τὰ σνς. πρώτως οὖν θεωρητέον, ὅτι λόγον ἔχει τὸ καλούμενον ἡμιτόνιον, ὃν τὰ σμγ πρὸς τὰ σνς, εἶτα ὅτι τὰ σμγ πρὸς τὰ σνς ἔλαττον περιέχουσιν ἡμιτονίου διάστημα[30].
>
> Tak zwany półton nie jest dokładnie półtonem: mówi się popularnie półton, właściwie jednak [jest to] *leímma*, i ma stosunek taki, jak 243 do 256. Przede wszystkim należy zauważyć, że tak zwany półton posiada stosunek taki, jak 243 do 256, a więc że 243 do 256 obejmuje interwał mniejszy od półtonu.

Oczywiście, można było od razu obliczyć ten stosunek, odejmując od kwarty czystej dwa całe tony, albo ich sumę (tercję wielką), która będzie się wyrażać stosunkiem $\frac{81}{64}$.

$$\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = \frac{4}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{256}{243}$$

[30] *Gaudenti Philosophi Harmonica Introductio*, s. 342.

Byłoby zaniedbaniem nie powrócić do wcześniej cytowanego tekstu Gaudencjusza i nie zainteresować się rozmiarem interwału zwanego *apotomḗ*. Skoro już znamy stosunek wyrażający *leímma*, łatwo obliczymy stosunek dla *apotomḗ*, wykonując następujące działanie:

$$\frac{9}{8} : \frac{256}{243} = \frac{9}{8} \times \frac{243}{256} = \frac{2187}{2048}$$

Po uproszczeniu (podział przez 8) otrzymamy wynik $\frac{273{,}375}{256}$, a czynimy to w tym celu, by zobaczyć, jak różni się *leímma* od *apotomḗ*. Kiedy zaś zsumujemy *leímma* i *apotomḗ*, otrzymamy dokładnie cały ton:

$$\frac{256}{243} \times \frac{2187}{2048} \times \frac{559872}{497664} = \frac{9}{8}$$

Przy użyciu stosunku uproszczonego działanie będzie wyglądać następująco:

$$\frac{273{,}375}{256} \times \frac{256}{243} \times \frac{273{,}375}{\cancel{256}} = \frac{\cancel{256}}{243} = \frac{273{,}375}{243} = \frac{9}{8}$$

Skoro już znamy wszystkie stosunki matematyczne pomiędzy poszczególnymi dźwiękami skali zgodnie ze strojem anonimowego autora z X w., dokonajmy ostatecznego rachunku:

$$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243} \times \frac{9}{8} = \frac{3869835264}{1934917632} = \frac{2}{1}$$

Przekonaliśmy się obecnie z całą pewnością, że dokładnie te stosunki liczbowe tworzące naturalne interwały będą dawały oktawę czystą.

Podsumowanie

W podsumowaniu należy dopowiedzieć trzy kwestie:

1. Interwały muzyczne w stroju naturalnym różnią się od interwałów w stroju równomiernie temperowanym. Jedynym dokładnie pokrywającym się konsonansem jest oktawa czysta. Poza nią każdy interwał (zarówno konsonansowy, jak dysonansowy) różni się pod względem rozmiaru.

2. Na tak nastrojonych organach, jak dokonał tego Anonim z X w., można było grać utwory w skalach modalnych. Takie zresztą wówczas były podstawowym tworzywem dźwiękowym.

3. Anonimowy autor z X w. wykazał wręcz brawurowo, że mając do dyspozycji wyłącznie dwa stosunki – *epógdoos* i *epítritos* – można w stroju naturalnym uzyskać wszystkie dźwięki diatoniczne o idealnie wymierzonej wysokości.

STRESZCZENIE

Przedmiotem artykułu jest interpretacja anonimowego traktatu łacińskiego *Mensura instrumenti organici* z X w. Tekst jest bardzo zwięzły, ma charakter prostego instruktażu przeznaczonego dla potencjalnego konstruktora organów. Strojenie piszczałek (o jednakowym obwodzie) dokonuje się wyłącznie za pomocą dwóch stosunków liczbowych – epitrytycznego (4:3) i epogdoicznego (9:8). Dokładne wyliczenia potwierdzają, że ta metoda okazała się pewna i daje rezultat w postaci dobrze nastrojonych piszczałek w stroju naturalnym (pitagorejskim) w zakresie trzech oktaw. W artykule przeprowadzono sporo działań matematycznych oraz przedstawiono miarę piszczałek za pomocą rysunków. Szczegółowo wyjaśniono również zagadnienia terminologiczne oraz zaprezentowano teksty greckie i łacińskie niezbędne do właściwej interpretacji traktatu.

SUMMARY

MENSURA INSTRUMENTI ORGANICI – HOW THE PIPE ORGAN WERE TUNED IN THE X CENTURY

The paper is intended to interpret the anonymous Latin Treaty entitled *Mensura instrumenti organici* written in the X century. The text is very concise and takes the form of a simple instruction intended for a potential constructor of pipe organs. Tuning pipes (of the same circuit) is performed exclusively by means of two ratios – *epitritos* (4:3) and *epogdoos* (9:8). The exact calculation confirms that this method proved to be reliable and results in well-tuned pipes using natural Pythagorean tuning in three octave range. Numerous mathematical calculations and the figures of pipes measurements are presented in the paper. The issues of terminology are explained in detail and Greek and Latin texts necessary for the proper interpretation of the treaty are also presented.

Słowa klucze: organy, piszczałka, strój naturalny, stosunek liczbowy, harmonia, interwał.

Key words: pipe organ, pipe, natural tuning, ratio, harmony, interval.